

Transfer-Matrix-Methode

Die Transfer-Matrix-Methode ist eine vielfach eingesetzte Methode zur Berechnung ein-dimensionaler Probleme. Hier wird erläutert, wie diese Methode zur Berechnung von Dünnschichtstrukturen implementiert wird. Beispiele für Dünnschichtstrukturen sind Antireflexschichten, dielektrische Spiegel und optische Filter. Die Funktion der Strukturen beruht auf Interferenzeffekten durch Schichtdicken im Nanometerbereich.

In Abschnitt 1 wird die Reflexion und Brechung von elektromagnetischen Wellen an einzelnen Grenzflächen wiederholt. In Abschnitt 2 wird dann die Funktionsweise der Transfer-Matrix-Methode erklärt.

1. Reflexion und Brechung an Grenzflächen

1.1. Die Helmholtz-Gleichung

Licht hat sowohl Wellen- als auch Teilchencharakter und alle Eigenschaften können quantenmechanisch beschrieben werden. Um die Reflexion und Brechung von Licht an Grenzflächen zu berechnen, reicht jedoch die Betrachtung von Licht als elektromagnetischer Welle und die Ableitung der Eigenschaften aus den Maxwell Gleichungen. Eine elektromagnetische Welle hat eine harmonische Zeitabhängigkeit des elektrischen Feldes \mathbf{E} und des magnetischen Feldes \mathbf{H} :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(j\omega t) \quad (1)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) \exp(j\omega t) \quad (2)$$

Hierbei ist \mathbf{r} der Vektor der x, y, z -Koordinate im Raum, t die Zeit und $\omega = 2\pi f = 2\pi c / \lambda$ die Kreisfrequenz (f : Frequenz, λ : Wellenlänge, c : Lichtgeschwindigkeit).

Wie in Anhang 2 beschrieben, lassen sich aus den Maxwell Gleichungen die Helmholtz-Gleichung (3) für das elektrische Feld \mathbf{E} einer elektromagnetischen Welle in isotropen, linearen, zeitunabhängigen Materialien ohne Raumladungen herleiten:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + k(\mathbf{r})^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3)$$

$$k(\mathbf{r}) = \sqrt{\mu(\mathbf{r})\varepsilon(\mathbf{r}) \omega^2 - j\mu(\mathbf{r})\kappa(\mathbf{r})\omega} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu_r(\mathbf{r})\varepsilon_r(\mathbf{r}) - j \frac{\mu_r(\mathbf{r})\kappa(\mathbf{r})}{\omega \varepsilon_0}} = \frac{\omega n(\mathbf{r})}{c} \quad (4)$$

$\mu = \mu_0 \mu_r$ ist die Permeabilität des Materials, $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ die Dielektrizität, κ die Leitfähigkeit und n der komplexe Brechungsindex. \mathbf{k} wird als Wellenvektor bezeichnet und zeigt in die Ausbreitungsrichtung mit Einheitsvektor $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}$.

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = k(\mathbf{r}) \mathbf{e}_{\mathbf{k}(\mathbf{r})} \quad (5)$$

Da das H-Feld mit Hilfe von (6) aus dem E-Feld berechnet werden kann, führen wir im Folgenden alle Berechnung am E-Feld durch.

$$H(\mathbf{r}) = \frac{E(\mathbf{r})n(\mathbf{r})}{Z_0} \quad (6)$$

Dabei ist $Z_0 = 376.7 \Omega$ die Vakuumimpedanz.

Gleichung (3) hat für ein homogenes Medium zwei Lösungen, eine vorwärtslaufende (f: forward) und eine rückwärtslaufende (b: backward) ebene Welle:

$$\mathbf{E}_f(\mathbf{r}, t) = E_f \exp[j(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})] \mathbf{e}_{\perp \mathbf{k}} \quad (7)$$

$$\mathbf{E}_b(\mathbf{r}, t) = E_b \exp[j(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{r})] \mathbf{e}_{\perp \mathbf{k}} \quad (8)$$

Das E-Feld zeigt in beiden Fällen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.

1.2. Konstanz der x-Komponente des Wellenvektors k_x

Betrachten wir nun die Reflexion und die Brechung an einer Grenzfläche zwischen zwei Materialien. Die Materialien haben die Brechungsindizes n_i und n_{i+1} (siehe Abbildung 1). Wir wählen das Koordinatensystem so, dass die Grenzfläche sich in die x- und die y-Richtung unendlich ausdehnt. Das E-Feld kann Komponenten in beliebiger Richtung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung haben. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass das E-Feld in der x-z-Ebene liegt. Mathematisch lassen sich Rechnungen am einfachsten ausführen, wenn der TM- und der TE-Fall getrennt berechnet werden und die Lösungen anschließend addiert werden. Diese getrennt Behandlung ist für lineare Materialien erlaubt.

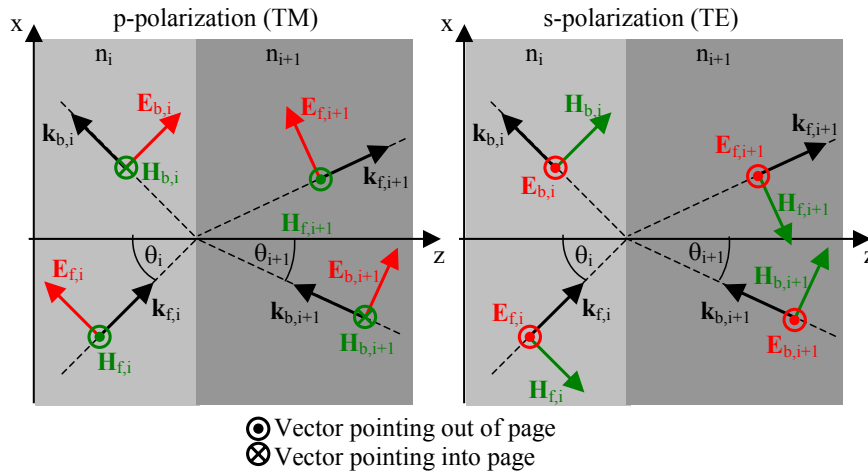


Abbildung 1. Konvention für die positive Richtung von \mathbf{k} , \mathbf{E} , and \mathbf{H} im Fall von p-Polarisation (TM) und s-Polarisation (TE).

In jedem Gebiet i gelten die Lösungen (7) und (8), d.h. jedes Gebiet kann eine vorwärts- und eine rückwärtslaufende Welle haben. Die Grenzfläche befindet sich an der Position $z=0$. Die Wahl der Position kann keinen Einfluss auf das Ergebnis haben und würde nur zu einer anderen Phase des einfallenden E-Feldes an der Grenzfläche führen. Die relativen Phasen zum reflektierten und transmittierten Feld werden dadurch nicht beeinflusst. Nach den Maxwell Gleichungen müssen die tangentialen Komponenten des E- und des H-Feldes über die Grenzfläche hinweg kontinuierlich sein.

Für TE-Polarisation ergibt sich daraus z.B. die Randbedingung (9):

$$E_{\parallel, f, i} \exp[j(\omega t - k_{f, x, i} x)] + E_{\parallel, b, i} \exp[j(\omega t + k_{b, x, i} x)] = E_{\parallel, f, i+1} \exp[j(\omega t - k_{f, x, i+1} x)] + E_{\parallel, b, i+1} \exp[j(\omega t + k_{b, x, i+1} x)] \quad (9)$$

Diese Randbedingung kann nur dann für alle Zeiten t und alle Positionen x entlang der Grenzfläche erfüllt sein, wenn ω für alle Schichten gleich ist und für die Wellenvektoren gilt:

$$k_{f,x,i} = -k_{b,x,i} = k_{f,x,i+1} = -k_{b,x,i+1} = \beta \quad (10)$$

Weiterhin gilt nach (4), dass der Betrag des Wellenvektor der vorwärts- und der rückwärtslaufenden Welle in einer gegebenen Schicht gleich sein muss.

Die konstante x -Komponente des Wellenvektors k wird im folgenden als β bezeichnet:

$$\beta = k_x = \frac{\omega}{c} n_i \sin(\theta_i) \quad (11)$$

Hieraus folgt auch direkt das Snelliussche Brechungsgesetz $n_i \sin(\theta_i) = n_{i+1} \sin(\theta_{i+1})$.

1.3. Amplitudenreflexions- und Transmissionskoeffizienten

Da die E-Feld Komponente E_{\parallel} parallel zur Grenzfläche konstant ist, setzen wir die folgenden Rechnungen für die parallelen Komponenten $E_{\parallel,f}$ der vorwärts- und $E_{\parallel,b}$ der rückwärtslaufenden Wellen auf. Wie in Anhang 3 gezeigt, sind die Amplitudenreflexionskoeffizienten $r_{i,i+1}$ und Transmissionskoeffizienten $t_{i,i+1}$ gegeben durch:

$$r_{i,i+1}(\beta, \omega) = \frac{E_{\parallel,b,i}}{E_{\parallel,f,i}} = \frac{n_{eff,i}(\beta, \omega) - n_{eff,i+1}(\beta, \omega)}{n_{eff,i}(\beta, \omega) + n_{eff,i+1}(\beta, \omega)} \quad (12)$$

$$t_{i,i+1}(\beta, \omega) = \frac{E_{\parallel,f,i+1}}{E_{\parallel,f,i}} = \frac{2 n_{eff,i}(\beta, \omega)}{n_{eff,i}(\beta, \omega) + n_{eff,i+1}(\beta, \omega)} \quad (13)$$

Der effektive Brechungsindex n_{eff} ist dabei bestimmt durch (14) für TE- und (15) für TM-Polarisation.

$$n_{eff,TE,i}(\beta, \omega) = n_i \sqrt{1 - \left(\frac{c \beta}{\omega n_i} \right)^2} \quad (14)$$

$$n_{eff,TM,i}(\beta, \omega) = \frac{n_i}{\sqrt{1 - \left(\frac{c \beta}{\omega n_i} \right)^2}} \quad (15)$$

1.4. Reflexionsgrad und Durchlässigkeit

Der Reflexionsgrad R und die Durchlässigkeit T der Grenzfläche sind in (16) und (17) definiert.

$$R = \frac{\text{Leistung, die von der Grenzfläche reflektiert wird}}{\text{Leistung, die auf die Grenzfläche auftrifft}} \quad (16)$$

$$T = \frac{\text{Leistung, die durch die Grenzfläche durchgelassen wird}}{\text{Leistung, die auf die Grenzfläche auftrifft}} \quad (17)$$

Der zeitabhängige Leistungsfluss einer elektromagnetischen Welle ist durch den Poynting-Vektor \mathbf{S} gegeben:

$$\mathbf{S}(x, z, t) = \text{Re}(\mathbf{E}(x, z, t)) \times \text{Re}(\mathbf{H}(x, z, t)) \quad (18)$$

Dies ist der Leistungsfluss durch eine Einheitsfläche, deren Normale parallel zum Poynting-Vektor steht. Die Durchschnittsenergie, die die Fläche pro Zeiteinheit durchquert, ist die Bestrahlungsstärke \mathbf{I} und diese ist für eine harmonische Zeitabhängigkeit gegeben durch (19).

$$\mathbf{I}(x, z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E}(x, z, t) \times \mathbf{H}(x, z, t)^*) \quad (19)$$

Um den Transmissionsgrad durch eine Grenzfläche zu berechnen, müssen wir berücksichtigen, dass der Leistungsfluss je nach Brechungsindex in einem anderen Winkel verglichen zur Grenzfläche erfolgt (siehe Abbildung 2).

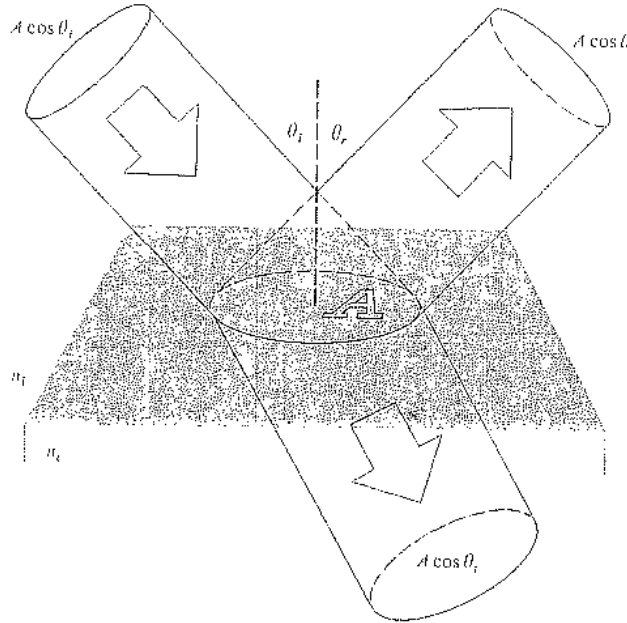


Abbildung 2. Reflexion und Brechung eines einfallenden Strahlenbündels [E. Hecht: „Optik“, Addison-Wesley (1989)].

Für eine gegebene Einheitsfläche A auf der Grenzfläche ist der zeitgemittelte Leistungsfluss durch A gegeben durch:

$$I_{\perp}(x, z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(E_{\parallel}(x, z, t) H_{\parallel}(x, z, t)^*) \quad (20)$$

Wir müssen also die einfallende, reflektierte und transmittierte Bestrahlungsstärke senkrecht zur Fläche A berechnen. Für TM-Polarisation erhalten wir:

$$I_{\perp, TM, inc}(x, z) = \frac{1}{2} \frac{|E_{f, x, 0}|^2 n_{inc}}{\cos(\theta_{inc}) Z_0} \quad (21)$$

$$I_{\perp, TM, refl}(x, z) = \frac{1}{2} \frac{|E_{b, x, 0}|^2 n_{inc}}{\cos(\theta_{inc}) Z_0} \quad (22)$$

$$I_{\perp, TM, trans}(x, z) = \frac{1}{2} \frac{|E_{f, x, N+1}|^2 n_{trans}}{\cos(\theta_{trans}) Z_0} \quad (23)$$

Für TE-Polarisation gilt:

$$I_{\perp, TE, inc}(x, z) = \frac{1}{2} \frac{|E_{f, y, 0}|^2 n_{inc} \cos(\theta_{inc})}{Z_0} \quad (24)$$

$$I_{\perp,TE,refl}(x,z) = \frac{1}{2} \frac{|E_{b,y,0}|^2 n_{inc} \cos(\theta_{inc})}{Z_0} \quad (25)$$

$$I_{\perp,TE,trans}(x,z) = \frac{1}{2} \frac{|E_{f,y,N+1}|^2 n_{trans} \cos(\theta_{trans})}{Z_0} \quad (26)$$

Daraus erhalten wir für die Durchlässigkeit:

$$T_{TM}(\beta, \omega) = \frac{|E_{f,x,N+1}(\beta, \omega)|^2}{|E_{f,x,0}(\beta, \omega)|^2} \frac{n_{trans} \cos(\theta_{trans})}{n_{inc} \cos(\theta_{inc})} \quad (27)$$

$$T_{TE}(\beta, \omega) = \frac{|E_{f,y,N+1}(\beta, \omega)|^2}{|E_{f,y,0}(\beta, \omega)|^2} \frac{n_{trans} \cos(\theta_{trans})}{n_{inc} \cos(\theta_{inc})} \quad (28)$$

Der Reflexionsgrad ist unabhängig von der Polarisation gegeben durch:

$$R(\beta, \omega) = \frac{|E_{\parallel,b,0}(\beta, \omega)|^2}{|E_{\parallel,f,0}(\beta, \omega)|^2} \quad (29)$$

2. Schichtsysteme

Schichtsysteme finden in vielen Bereichen der Optik Anwendung z.B. als Antireflexschichten, dielektrische Spiegel oder Filter. Die Reflexions- und Transmissionseigenschaften von Schichtsystemen können mit Hilfe der sogenannten Transfer-Matrix-Methode berechnet werden. Jede einzelne Schicht i ist homogen und hat daher nach Abschnitt 1.1. zwei Lösungen, eine vorwärtslaufende und eine rückwärtslaufende ebene Welle mit E-Feld Amplituden $E_{f,i}$ und $E_{b,i}$. Der Vektor $\begin{pmatrix} E_{\parallel,f,i} \\ E_{\parallel,b,i} \end{pmatrix}$ be-

schreibe das E-Feld parallel zur Grenzfläche an der Position z_i am linken Rand der Schicht i (siehe Abbildung 3).

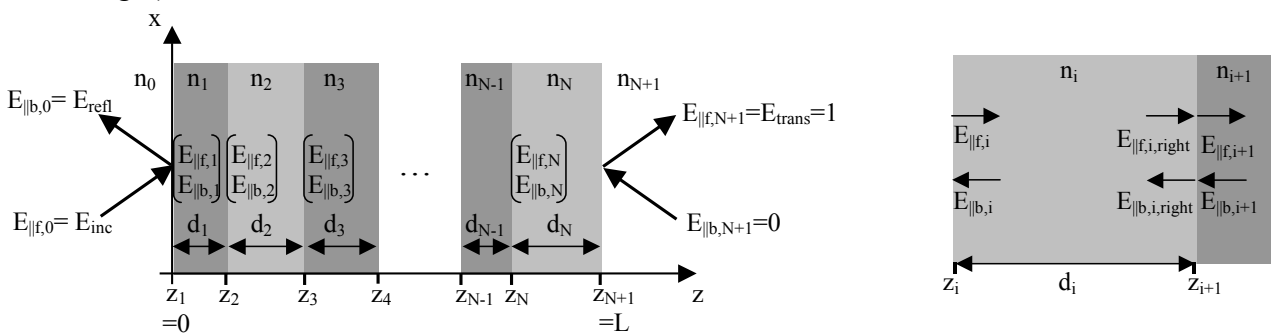


Abbildung 3. Nomenklatur für die Transfer-Matrix-Methode zur Berechnung eines Schichtsystems.

Innerhalb der Schicht i findet die Ausbreitung der Wellen nach Gleichungen (7) und (8) statt, wobei der Ausbreitungsvektor k_i vom Brechungsindex n_i abhängt und die Ausbreitungsrichtung vom Einfallswinkel bzw. β abhängt. Der E-Feld Vektor am linken Rand der Schicht i ist mit dem E-Feld Vektor am rechten Rand derselben Schicht durch die Ausbreitungsmatrix \mathbf{P}_i verbunden.

$$\begin{pmatrix} E_{\parallel,f,i} \\ E_{\parallel,b,i} \end{pmatrix} = \mathbf{P}_i \begin{pmatrix} E_{\parallel,f,i,right} \\ E_{\parallel,b,i,right} \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$\mathbf{P}_i(\beta, \omega) = \begin{pmatrix} \exp\left(j\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}n_i\right)^2 - \beta^2} d_i\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-j\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}n_i\right)^2 - \beta^2} d_i\right) \end{pmatrix} \quad (31)$$

Der E-Feld Vektor am rechten Rand der Schicht i ist mit dem E-Feld Vektor am linken Rand der Schicht $i+1$ durch die Übergangsmatrix $\mathbf{D}_{i,i+1}$ verknüpft.

$$\begin{pmatrix} E_{\parallel, f, i, \text{right}} \\ E_{\parallel, b, i, \text{right}} \end{pmatrix} = \mathbf{D}_i \begin{pmatrix} E_{\parallel, f, i+1} \\ E_{\parallel, b, i+1} \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$\mathbf{D}_{i,i+1}(\beta, \omega) = \frac{1}{t_{i,i+1}(\beta, \omega)} \begin{pmatrix} 1 & r_{i,i+1}(\beta, \omega) \\ r_{i,i+1}(\beta, \omega) & 1 \end{pmatrix} \quad (33)$$

Dabei sind die Amplitudenreflexionskoeffizienten $r_{i,i+1}$ und Transmissionskoeffizienten $t_{i,i+1}$ an den Grenzflächen durch die Kontinuität der Tangentialkomponenten des E- und H-Feldes gegeben und werden wie in Abschnitt 1.3. berechnet.

Unter der Annahme dass nur Licht von links einfällt ($E_{b, N+1} = 0$) können wir nun die Reflexions- und Transmissionseigenschaften des Schichtsystems durch Multiplikation der entsprechenden Matrizen berechnen:

$$\begin{pmatrix} E_{\parallel, \text{inc}} \\ E_{\parallel, \text{refl}} \end{pmatrix} = \mathbf{D}_{0,1} \mathbf{P}_1 \mathbf{D}_{1,2} \mathbf{P}_2 \mathbf{D}_{2,3} \cdots \mathbf{P}_{N-1} \mathbf{D}_{N-1,N} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

Dabei wird $E_{f, i+1}$ willkürlich auf 1 gesetzt. Die korrekte Energie kann im Anschluss durch Skalierung der Ergebnisse berechnet werden. Diese Methode kann zu der Berechnung des Reflexionsgrades und der Durchlässigkeit beliebiger Schichtsysteme verwendet werden.

Anhang 1. Kleine Mathematik-Wiederholung

Für kartesische Koordinaten gilt:

$$\text{grad } f = \nabla f = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \\ \partial f / \partial z \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$\text{div } \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (36)$$

$$\text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \quad (37)$$

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad } f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (38)$$

Anhang 2. Herleitung der Helmholtz-Gleichung

Die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen wird durch die Maxwell Gleichungen (39) bis (42) beschrieben.

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) \quad (39)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \dot{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t) \quad (40)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (41)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (42)$$

Weiterhin sind die Materialgleichungen durch (43) bis (45) gegeben.

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (43)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu(\mathbf{r})} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (44)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \kappa(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (45)$$

Durch Bilden der Rotation von (39) and (40) und Einsetzen der Maxwell Gleichungen (41) und (42) sowie der Materialgleichungen (43) bis (45), erhält man (46) und (47).

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \times \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = -\mu(\mathbf{r}) \kappa(\mathbf{r}) \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) - \mu(\mathbf{r}) \varepsilon(\mathbf{r}) \ddot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \quad (46)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \{ \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \dot{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t) \} = -\mu(\mathbf{r}) \kappa(\mathbf{r}) \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) - \mu(\mathbf{r}) \varepsilon(\mathbf{r}) \ddot{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) \quad (47)$$

Unter Berücksichtigung der Vektoridentität (48)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (48)$$

sowie Gleichungen (41), (42) und $\rho = 0$ (keine Raumladungen), ergeben sich aus (46) and (47) die Gleichungen (49) and (50).

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mu(\mathbf{r})\kappa(\mathbf{r})\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) + \mu(\mathbf{r})\varepsilon(\mathbf{r})\ddot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \quad (49)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mu(\mathbf{r})\kappa(\mathbf{r})\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) + \mu(\mathbf{r})\varepsilon(\mathbf{r})\ddot{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) \quad (50)$$

Gleichungen (49) and (50) werden als Telegraf- bzw. Wellengleichungen bezeichnet. (49) und (50) sind nicht unabhängig voneinander, sondern können ineinander umgewandelt werden.

Für ein zeitharmonisches elektrisches Feld gilt (Beachten Sie, dass nur der Realteil physikalische Bedeutung hat!):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})\exp(j\omega t) \quad (51)$$

Einsetzen von (51) in (49), ergibt (52).

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \left\{ \mu(\mathbf{r})\varepsilon(\mathbf{r}) \omega^2 - j\mu(\mathbf{r})\kappa(\mathbf{r})\omega \right\} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (52)$$

Mit Definition (53) für k erhalten wir also (56).

$$k(\mathbf{r}) = \sqrt{\mu(\mathbf{r})\varepsilon(\mathbf{r}) \omega^2 - j\mu(\mathbf{r})\kappa(\mathbf{r})\omega} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu_r(\mathbf{r})\varepsilon_r(\mathbf{r}) - j \frac{\mu_r(\mathbf{r})\kappa(\mathbf{r})}{\omega \varepsilon_0}} = \frac{\omega n(\mathbf{r})}{c} \quad (53)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + k(\mathbf{r})^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (54)$$

Gleichung (54) heißt Helmholtz-Gleichung.

Anhang 3. Berechnung der Amplitudenreflexions- und Transmissionskoeffizienten

Hier berechnen wir den Amplitudentransmissions- und Reflexionskoeffizienten für Lichteinfall von links ($E_{b,i+1} = 0$). Betrachten wir zunächst den Fall der TE-Polarisation. Aus den Randbedingungen erhalten wir unter Berücksichtigung von Abschnitt 1.2.:

$$E_{y,f,i} + E_{y,b,i} = E_{y,f,i+1} \quad (55)$$

$$-H_{x,f,i} + H_{x,b,i} = -H_{x,f,i+1} \quad (56)$$

H-Feld und E-Feld hängen zusammen über:

$$H_{x,f,i} = H_{f,i} \cos(\theta_i) = \frac{E_{f,i} n_i}{Z_0} \cos(\theta_i) = \frac{E_{y,f,i} n_i}{Z_0} \cos(\theta_i) \quad (57)$$

Entsprechendes gilt für $H_{x,b,i}$ und $H_{x,f,i+1}$. Einsetzen von (57) in (56) ergibt:

$$-\frac{E_{y,f,i} n_i}{Z_0} \cos(\theta_i) + \frac{E_{y,b,i} n_i}{Z_0} \cos(\theta_i) = -\frac{E_{y,f,i+1} n_{i+1}}{Z_0} \cos(\theta_{i+1}) \quad (58)$$

Um den Amplitudenreflexionskoeffizienten zu berechnen, setzen wir (55) in (58) ein:

$$-\frac{E_{y,f,i} n_i}{Z_0} \cos(\theta_i) + \frac{E_{y,b,i} n_i}{Z_0} \cos(\theta_i) = -\frac{(E_{y,f,i} + E_{y,b,i}) n_{i+1}}{Z_0} \cos(\theta_{i+1}) \quad (59)$$

Auflösen ergibt:

$$r_{TE,i,i+1} = \frac{E_{y,b,i}}{E_{y,f,i}} = \frac{n_i \cos(\theta_i) - n_{i+1} \cos(\theta_{i+1})}{n_i \cos(\theta_i) + n_{i+1} \cos(\theta_{i+1})} \quad (60)$$

Berücksichtigen wir nun noch, dass gilt

$$\cos(\theta_i) = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i} = \sqrt{1 - \left(\frac{c\beta}{\omega n_i}\right)^2} \quad (61)$$

so erhalten wir den gewünschten Amplitudenreflexionskoeffizienten für TE-Polarisation. Der Amplitudentransmissionskoeffizient berechnet sich entsprechend durch Einsetzen von $E_{y,b,i}$ aus (55) in (58):

$$-\frac{E_{y,f,i}n_i}{Z_0} \cos(\theta_i) + \frac{(E_{y,f,i+1} - E_{y,f,i})n_i}{Z_0} \cos(\theta_i) = -\frac{E_{y,f,i+1}n_{i+1}}{Z_0} \cos(\theta_{i+1}) \quad (62)$$

Auflösen ergibt:

$$t_{TE,i,i+1} = \frac{E_{y,f,i+1}}{E_{y,f,i}} = \frac{2n_i \cos(\theta_i)}{n_i \cos(\theta_i) + n_{i+1} \cos(\theta_{i+1})} \quad (63)$$

Die Randbedingungen für TM-Polarisation lauten entsprechend:

$$E_{x,f,i} + E_{x,b,i} = E_{x,f,i+1} \quad (64)$$

$$H_{y,f,i} - H_{y,b,i} = H_{y,f,i+1} \quad (65)$$

H-Feld und E-Feld hängen wieder zusammen über:

$$H_{y,f,i} = H_{f,i} = \frac{E_{f,i}n_i}{Z_0} = \frac{E_{x,f,i}n_i}{Z_0 \cos(\theta_i)} \quad (66)$$

Entsprechendes gilt für $H_{y,b,i}$ und $H_{y,f,i+1}$. Einsetzen von (66) in (65) ergibt:

$$\frac{E_{x,f,i}n_i}{Z_0 \cos(\theta_i)} - \frac{E_{x,b,i}n_i}{Z_0 \cos(\theta_i)} = \frac{E_{x,f,i+1}n_{i+1}}{Z_0 \cos(\theta_{i+1})} \quad (67)$$

Um den Amplitudenreflexionskoeffizienten zu berechnen, setzen wir (64) in (67) ein:

$$\frac{E_{x,f,i}n_i}{Z_0 \cos(\theta_i)} - \frac{E_{x,b,i}n_i}{Z_0 \cos(\theta_i)} = \frac{(E_{x,f,i} + E_{x,b,i})n_{i+1}}{Z_0 \cos(\theta_{i+1})} \quad (68)$$

Auflösen ergibt:

$$r_{TM,i,i+1} = \frac{E_{x,b,i}}{E_{x,f,i}} = \frac{n_i / \cos(\theta_i) - n_{i+1} / \cos(\theta_{i+1})}{n_i / \cos(\theta_i) + n_{i+1} / \cos(\theta_{i+1})} \quad (69)$$

Entsprechend erhalten wir den Amplitudentransmissionskoeffizient durch Einsetzen von $E_{x,b,i}$ aus (64) in (68):

$$\frac{E_{x,f,i}n_i}{Z_0 \cos(\theta_i)} - \frac{(E_{x,f,i+1} - E_{x,f,i})n_i}{Z_0 \cos(\theta_i)} = \frac{E_{x,f,i+1}n_{i+1}}{Z_0 \cos(\theta_{i+1})} \quad (70)$$

Auflösen ergibt:

$$t_{TM,i,i+1} = \frac{E_{x,f,i+1}}{E_{x,f,i}} = \frac{2n_i / \cos(\theta_i)}{n_i / \cos(\theta_i) + n_{i+1} / \cos(\theta_{i+1})} \quad (71)$$

Anhang 4. Herleitung der Ausbreitungsmatrix und der Übergangsmatrix

Um die Ausbreitungsmatrix \mathbf{P}_i aufzustellen, müssen wir die E-Feld Amplituden $E_{\parallel,f,i}$ und $E_{\parallel,b,i}$ mit $E_{\parallel,f,i,\text{right}}$ und $E_{\parallel,b,i,\text{right}}$ in Verbindung bringen. Die E-Feld Ausbreitung in einer Schicht i wird be-

geschrieben durch (72) und (73), wobei die Amplitude $E_{f,i}$ und $E_{b,i}$ jeweils für den linken Rand der Schicht bei Position z_i sind.

$$\mathbf{E}_{f,i}(\mathbf{r}, t) = E_{f,i} \exp[j(\omega t - \beta x - k_{z,i}(z - z_i))] \mathbf{e}_{\perp k_i} \quad (72)$$

$$\mathbf{E}_{b,i}(\mathbf{r}, t) = E_{b,i} \exp[j(\omega t - \beta x + k_{z,i}(z - z_i))] \mathbf{e}_{\perp k_i} \quad (73)$$

Damit ergibt sich der Zusammenhang:

$$E_{\parallel, f, i} = \exp[j(k_{z,i} d_i)] E_{\parallel, f, i, \text{right}} + 0 \cdot E_{\parallel, b, i, \text{right}} \quad (74)$$

$$E_{\parallel, b, i} = 0 \cdot E_{\parallel, f, i, \text{right}} + \exp[-j(k_{z,i} d_i)] E_{\parallel, b, i, \text{right}} \quad (75)$$

Beachten wir weiterhin, dass für die Wellenvektoren gilt

$$k_{z,i}^2 = k_i^2 - \beta^2 = \left(\frac{\omega}{c} n_i\right)^2 - \beta^2 \quad (76)$$

so erhalten wir in Matrixschreibweise die gesuchte Ausbreitungsmatrix \mathbf{P}_i .

Analog zu Abschnitt 1.2 müssen nach den Maxwell Gleichungen die tangentialen Komponenten des E- und des H-Feldes über die Grenzfläche hinweg stetig sein. Damit erhalten wir für TE-Polarisation an der Position z_{i+1} die Randbedingungen:

$$E_{y, f, i, \text{right}} + E_{y, b, i, \text{right}} = E_{y, f, i+1} + E_{y, b, i+1} \quad (77)$$

$$-H_{x, f, i, \text{right}} + H_{x, b, i, \text{right}} = -H_{x, f, i+1} + H_{x, b, i+1} \quad (78)$$

Einsetzen des E-Feldes in (78) nach Gleichung (58) und Eliminieren von $E_{y, b, i, \text{right}}$ durch Einsetzen von (77) in (78) ergibt:

$$E_{y, f, i, \text{right}} = \frac{1}{t_{12}} E_{y, f, i+1} + \frac{r_{12}}{t_{12}} E_{y, b, i+1} \quad (79)$$

Nach entsprechender Berechnung von $E_{y, b, i, \text{right}}$ können wir die Übergangsmatrix $\mathbf{D}_{i, i+1}$ für TE-Polarisation aufstellen. Durch das gleiche Verfahren erhalten wir auch die Übergangsmatrix $\mathbf{D}_{i, i+1}$ für TM-Polarisation.